Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Étude métrique des courbes planes

1. Représentation normale d'un arc

1.1. Paramétrage admissible

Définition :

Soit $(I, \vec{f})$ un arc paramétré du plan P. Supposons-le de classe $\mathscr{C}^k$ et désignons par C son support.
L'arc $(J, \vec{g})$ de classe $\mathscr{C}^k$ est dit équivalent à $(I, \vec{f})$ s'il existe une bijection φ de I dans J, de classe $\mathscr{C}^k$ ainsi que sa réciproque, telle que $\vec{f}=\vec{g}\circ\varphi$.
On dit que φ est un paramétrage admissible de $(I, \vec{f})$.
$\forall t\in I,\ \vec{f}(t)=\vec{g}(\varphi(t))$, et $\forall u\in J,\ \vec{g}(u)=\vec{f}(\varphi^{-1}(u))$.

Remarque :

Les arcs $(I, \vec{f})$ et $(J, \vec{g})$ ont le même support C. $\varphi(t)$ est un nouveau paramétrage permettant de décrire C à l'aide de la fonction $\vec{g}$.
Si $k\geqslant 1$, les fonctions $\vec{f}$, $\vec{g}$ et φ sont dérivables, et $\vec{f}'(t)=\varphi'(t)\vec{g}'(\varphi(t))$.
Les vecteurs dérivés $\vec{f}'(t)$ et $\vec{g}'(t)$ sont donc colinéaires, et comme φ' ne s'annule pas (car φ^{-1} est dérivable), ces deux vecteurs ne peuvent que s'annuler simultanément : les arcs $(I, \vec{f})$ et $(J, \vec{g})$ ont les mêmes points stationnaires.
En particulier, si l'un est régulier, l'autre l'est aussi.

1.2. Abscisse curviligne

Définition :

Soit $(I, \vec{f})$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ régulier. Il existe en tout point de I un vecteur vitesse $\vec{f}'(t)$. La norme de ce vecteur représente la vitesse numérique du mobile.
On appelle abscisse curviligne toute primitive de la fonction continue $t\mapsto\|\vec{f}'(t)\|$.
$\sigma(t)=\int_{t_0}^{t}\|\vec{f}'(u)\|du$, avec $t_0\in I$.
Intuitivement, l'abscisse curviligne représente une sorte de compteur kilométrique permettant de mesurer la distance parcourue sur la courbe C.

Théorème :

Pour tout arc $(I, \vec{f})$ de classe $\mathscr{C}^1$ régulier, l'abscisse curviligne est un paramétrage admissible.

Preuve :

Par définition, l'abscisse curviligne est dérivable et $\sigma'(t)=\|\vec{f}'(t)\|$. Cette dérivée est continue, σ est de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus, l'arc étan régulier, $\sigma'(t)$ est strictement positif : la fonction σ est strictement croissante sur I et continue donc bijective. Sa bijection réciproque est dérivable et pour tout $s\in\sigma(I)$, $(\sigma^{-1})'(t)=\dfrac{1}{\|\vec{f}'(\sigma^{-1}(s))\|}$.
$(\sigma^{-1})'$ est continue, donc σ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$. Donc σ est un paramétrage admissible de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque :

Ce paramétrage admissible permet de définir l'arc équivalent $(J, \vec{F})$ tel que $\vec{f}=\vec{F}\circ\sigma$,
c'est-à-dire $\forall t\in I,\ \vec{f}(t)=\vec{F}(\sigma(t))$. En dérivant on obtient $\vec{f}'(t)=\sigma'(t)\vec{F}'(\sigma(t))=\|\vec{f}'(t)\|\vec{F}'(\sigma(t))$,
D'où $\vec{F}'(t)=\dfrac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$: ce vecteur est de norme 1, il s'agit du vecteur unitaire colinéaire à $\vec{f}'(t)$ et de même sens.
$\forall s\in\sigma(I)$, $\|\vec{F}'(s)\|=1$, l'arc $(\sigma(I), \vec{F})$ réalise donc le parcours de la courbe C à vitesse constante égale à 1 :
On dit que l'abscisse curviligne est un paramétrage normal de C.

1.3. Repère de Frenet

Définition :

Supposons le plan orienté. Soit M un point de C d'abscisse curviligne s. Désignons par $\vec{T}$ le vecteur unitaire $\vec{F}'(s)=\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{ds}$. On l'appelle vecteur tangent unitaire à C en M.

On peut calculer le vecteur $\vec{T}$ à partir de tout paramétrage admissible par $\vec{T}=\dfrac{\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}=\dfrac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$.

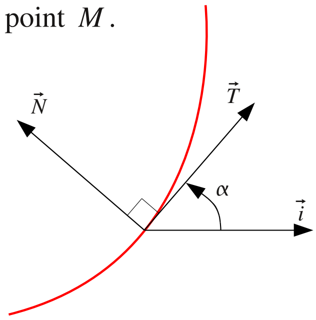
Désignons par $\vec{N}$ l'image de $\vec{T}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Le repère orthonormal direct $(M,\vec{T},\vec{N})$ est appelé repère de Frenet attaché au point M.

Remarque :

Si le plan est est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, désignons par α l'angle $(\vec{i},\vec{T})$.

On a alors $\begin{cases}\vec{T}=\cos(\alpha)\,\vec{i}+\sin(\alpha)\,\vec{j}\\ \vec{N}=-\sin(\alpha)\,\vec{i}+\cos(\alpha)\,\vec{j}\end{cases}$, $\cos(\alpha)=\dfrac{dx}{ds}$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{dy}{ds}$



Remarque :

$\vec{T}$, $\vec{N}$, α sont des fonctions de l'abscisse curviligne s, ou de tout paramètre équivalent t. Nous admettrons que si l'arc est de classe $\mathscr{C}^k$, ces fonctions sontde classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

1.4. Calcul pratique

1.4.1. Coordonnées cartésiennes

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $(I,\vec{f})$ l'arc paramétré défini par $\forall t\in I,\ \vec{f}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$. On suppose $\vec{f}$ au moins de classe $\mathscr{C}^1$.

$\vec{f}'(t)=x'(t)\,\vec{i}+y'(t)\,\vec{j}\ :\ \|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$

Cette dernière formule permet, après recherche d'une primitive, de calculer une abscisse curviligne.

On a aussi : $\begin{cases}\vec{T}=\dfrac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}=\dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\vec{i}+\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\vec{j}\\ \vec{N}=-\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\vec{i}+\dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\vec{j}\end{cases}$, $\begin{cases}\cos(\alpha)=\dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\\ \sin(\alpha)=\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\end{cases}$

1.4.2. Coordonnées polaires

Si l'arc est représenté par l'équation polaire : $\theta\mapsto\rho(\theta)$, on a dans le repère polaire $\vec{f}(\theta)=\rho(\theta)\vec{u}(\theta)$,

D'où $\vec{f}'(\theta)=\rho'(\theta)\vec{u}(\theta)+\rho(\theta)\vec{v}(\theta)$, et $\|\vec{f}'(\theta)\|=\sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2}$

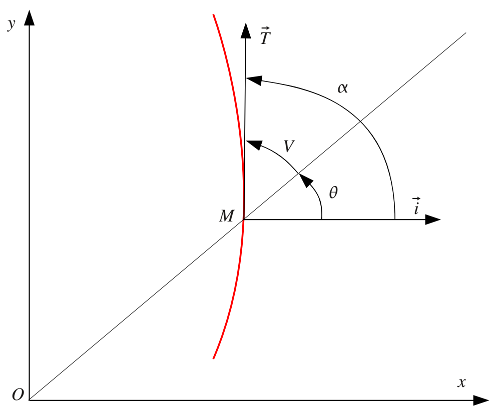
On a alors $\vec{T}=\dfrac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2}}\vec{u}(\theta)+\dfrac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2}}\vec{v}(\theta)$,

et $\vec{N}=-\dfrac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2}}\vec{u}(\theta)+\dfrac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2}}\vec{v}(\theta)$.

On a alors $\begin{cases}\vec{T}=\cos(V)\vec{u}(\theta)+\sin(V)\vec{v}(\theta)\\ \vec{N}=-\sin(V)\vec{u}(\theta)+\cos(V)\vec{v}(\theta)\end{cases}$,

où l'angle V est l'angle $(\vec{u}(\theta),\vec{T})$. Il vérifie $\tan(V)=\dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.

Enfin, l'angle α se calcule par $\alpha=(\vec{i},\vec{T})=(\vec{i},\overrightarrow{OM})+(\overrightarrow{OM},\vec{T})=\theta+V$



2. Longueur d'un arc de courbe

Définition :

Soient $(I,\vec{f})$ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et t_0, t_1 deux éléments de I tels que $t_0 < t_1$. L'abscisse curviligne s étant un paramétrage normal, la longueur de l'arc $([t_0, t_1], \vec{f})$ est donnée par $L(t_0, t_1) = s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{f}\,'(t)\| dt$.

Calcul en coordonnées cartésiennes :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si la courbe paramétrée est définie par $t \mapsto \vec{f}(t) = (x(t), y(t))$, la longueur de l'arc $(M(t_0), M(t_1))$ est $L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$.

Calcul en coordonnées polaires :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si la courbe est définie par l'équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$, la longueur de l'arc $(M(\theta_0), M(\theta_1))$ est $L(\theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$.

3. Courbure d'un arc de classe $\mathscr{C}^2$

3.1. Définition

Définition :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(I, \vec{f})$ un arc de classe au moins $\mathscr{C}^2$, et $s = \sigma(t)$ l'abscisse curviligne. Les fonctions $s \mapsto \alpha(s)$ et $s \mapsto \vec{T}(s)$ sont encore dérivables, et :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{d\alpha}{ds}\sin(\alpha)\vec{i} + \frac{d\alpha}{ds}\cos(\alpha)\vec{j}, \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\alpha}{ds}\cos(\alpha)\vec{i} - \frac{d\alpha}{ds}\sin(\alpha)\vec{j}$$

La fonction numérique $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$ est appelée courbure. On a donc $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$ et $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T}$.

La courbure $\gamma(s)$ caractérise la vitesse de variation de la direction de la tangente. Elle est positive si la tangente tourne dans le sens direct, négative si elle tourne dans le sens rétrograde.

Définition :

On dit que $M(s)$ est birégulier si les vecteurs $\vec{T}$ et $\frac{d\vec{T}}{ds}$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire $p=1$ et $q=2$.

Proposition :

$M(s)$ est birégulier $\Leftrightarrow$ $\gamma(s) \neq 0$.

Définition :

En un point birégulier $M(s)$, on appelle rayon de courbure le réel $R(s) = \frac{1}{\gamma(s)}$.

Remarque :

La courbe est assimilable au voisinage du point $M(s)$ à un arc de cercle de rayon $|R(s)|$. Ce cercle est appelé cercle osculateur. Son centre est appelé centre de courbure.

3.2. Expression de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet

En interprétant un arc de classe $\mathscr{C}^2$ comme le mouvement d'un point mobile $M(t)$,

le vecteur vitesse est $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, la vitesse numérique $v = \|\vec{V}\|$, le vecteur accélération $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$.

On a donc $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = v\vec{T}$ (dérivée d'une fonction composée), et en dérivant cette expression :

$\vec{\Gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\gamma\vec{N}$, et en un point birégulier, $\gamma = \frac{1}{R}$ et $\vec{\Gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$.

Le vecteur $\frac{dv}{dt}\vec{T}$ est appelé accélération tangentielle. Le vecteur $\frac{v^2}{R}\vec{N}$ est appelé accélération normale.

3.3. Calcul pratique

3.3.1. Coordonnées cartésiennes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(I, \vec{f})$ un arc de classe au moins $\mathscr{C}^2$, avec $\vec{f}(t)=(x(t), y(t))$. L'abscisse curviligne vérifie $\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$.

Les coordonnées de $\vec{T}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ sont $\dfrac{dx}{ds}=\cos(\alpha)$ et $\dfrac{dy}{ds}=\sin(\alpha)$, d'où $\tan(\alpha)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}$

Dans certains cas, cette relation permet de calculer α explicitement en fonction de t et d'en déduire $\dfrac{d\alpha}{dt}$ puis $\gamma=\dfrac{d\alpha}{ds}$.

Dans le cas général, en dérivant par rapport à t, on obtient $(1+\tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{x'y''-x''y'}{x'^2}$

D'où $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2}$, d'où l'expression de la courbure $\gamma=\dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\dfrac{\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\vec{f}', \vec{f}'')}{\|\vec{f}'\|^3}$.

Remarque :
On trouve une nouvelle caractérisation des points d'inflexion : la courbure s'annule et change de signe.

3.3.2. Coordonnées polaires

Soit une courbe définie par l'équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$. $\alpha=\theta+V$, d'où $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=1+\dfrac{dV}{d\theta}$.

De $\tan(V)=\dfrac{\rho}{\rho'}$ on tire : $\left(1+\dfrac{\rho^2}{\rho'^2}\right)\dfrac{dV}{d\theta}=\dfrac{\rho'^2-\rho'\rho''}{\rho'^2}$, d'où $\dfrac{dV}{d\theta}=\dfrac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2}$ et $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2}$

Finalement, $\gamma=\dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{d\alpha}{d\theta}\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}$

3.4. Cas d'un arc birégulier

Définition :
Un arc de classe $\mathscr{C}^2$ est dit birégulier si tous ses points sont biréguliers, c'est-à-dire si sa courbure ne s'annule pas.

Proposition :
Pour un arc birégulier, la fonction α est un paramétrage admissible de classe $\mathscr{C}^1$.

Preuve :
$s \mapsto \alpha(s)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée est la courbure γ, qui est continue et qui ne s'annule pas, donc qui garde un signe constant. α est continue et strictement monotone, donc bijective. Sa bijection réciproque est dérivable et $(\alpha^{-1})'=\dfrac{1}{\gamma \circ \alpha^{-1}}$. Cette dérivée est continue donc α^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque :
On a alors $\dfrac{d\vec{T}}{d\alpha}=\dfrac{d\vec{T}}{ds}\dfrac{ds}{d\alpha}=\dfrac{\gamma\vec{N}}{\gamma}=\vec{N}$, et $\dfrac{d\vec{N}}{d\alpha}=\dfrac{d\vec{N}}{ds}\dfrac{ds}{d\alpha}=\dfrac{-\gamma\vec{T}}{\gamma}=-\vec{T}$.

* * * * *